DNB 2019 – EPREUVE DE MATHEMATIQUES *METROPOLE*

Exercice 1. Arithmétique 10 points

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or.

1. Décomposer 69, 1 150 et 4 140 en produits de facteurs premiers.

On obtient : **$69 = 3 \times 23$** et **$1\,150 = 2 \times 5^2 \times 23$** et **$4\,140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$**

2. Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins. Combien y a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?

Toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués donc le nombre de marins est un diviseur commun de 69, 1 150 et 4 140. La décomposition de la question précédente nous donne montre que seuls 23 et 1 divisent à la fois 69, 1 150 et 4 140. On sait qu'il y a plus de 1 marin, donc l'unique solution possible est $\boxed{\mathbf{23}}$.

On peut en conclure qu'**<u>il y a 23 marins</u>**.

Exercice 2. Géométrie 19 points

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près. Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (Figure 1), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (Figure 2).

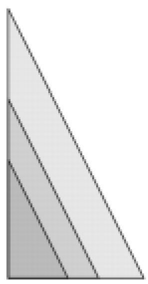


Figure 1

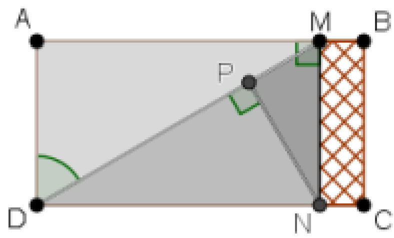


Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes : Le triangle ADM est rectangle en A ; AD=2 m et $\widehat{ADM} = 60°$.

1. Montrer que [AM] mesure environ 3,46 m.

Le triangle ADM est rectangle en A donc :

$\tan \widehat{ADM} = \frac{AM}{AD}$ *ou* $\tan 60° = \frac{AM}{2}$. Donc $AM = 2 \times \tan 60° \approx \boxed{\mathbf{3{,}46\ m}}$

2. La partie de la plaque non utilisée est représentée en quadrillé sur la figure 2. Calculer une valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.

La proportion de la plaque qui n'est pas utilisée est ce qui reste en enlevant la proportion de la plaque utilisée : $p = 1 - \frac{\text{Aire(AMND)}}{\text{Aire(ABCD)}} = 1 - \frac{AD \times AM}{AD \times AB} = 1 - \frac{2 \times \tan 60}{4} \approx 0{,}13$, soit environ 13%.

3. Pour que la superposition des triangles soit harmonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables. Démontrer que c'est bien le cas.

Des triangles sont semblables lorsque les mesures de leurs angles sont égales 2 à 2.
• AMD triangle rectangle en A d'angles complémentaires 60° et 30°.

• $\widehat{PDN} = 90 - \widehat{ADM} = 90 - 60 = 30$ °.
PDN triangle rectangle en P donc $\widehat{PND}$ et $\widehat{PDN}$= 60° complémentaires et $\widehat{PND}$ = 30°..
• $\widehat{PMN} = 90 - \widehat{AMD} = 90 - 30 = 60$°.
MPN triangle rectangle en P donc $\widehat{MNP}$ et $\widehat{PMN}$= 60° complémentaires et $\widehat{MNP}$ = 30°.
AMD, PNM et MPD sont semblables.

4. Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que 1,5. Est-ce le cas? Justifier.
Le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD est : $k = \frac{DM}{DN} = \frac{DM}{AM}$

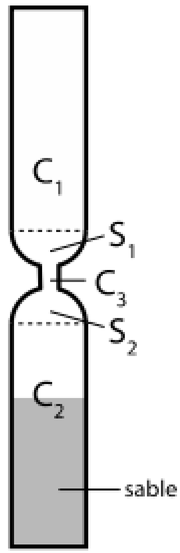
Or ADM est un triangle rectangle en A donc $\cos \widehat{ADM} = \frac{AD}{DM}$ ou $\cos 60° = \frac{2}{DM}$. D'où $DM = \frac{2}{\cos 60}$

Donc $k = \frac{\frac{2}{\cos 60}}{2 \times \tan 60} \approx \boxed{1{,}15}$
Le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD est plus petit que 1,5.

Exercice 3. Géométrie 17 points

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
Un sablier est composé de
- Deux cylindres C_1 et C_2 de hauteur 4,2 cm et de diamètre 1,5 cm
- Un cylindre C3
- Deux demi-sphères S_1 et S_2 de diamètre 1,5 cm

On rappelle le volume V d'un cylindre d'aire de base B et de hauteur h : V = B × h



1.
a. Au départ, le sable remplit le cylindre C_2 aux deux tiers. Montrer que le volume du sable est environ 4,95 cm^3.

La base du cylindre C_2 est un disque de diamètre 1,5 cm, donc de rayon 0,75 cm. $V = \pi \times 0{,}75^2 \times 4{,}2 = 2{,}3625\pi$ cm3.

Le volume de sable correspond aux deux tiers du volume du cylindre : $Vs = \frac{2}{3} \times 2{,}3625\pi = 1{,}575\pi \approx \boxed{4{,}95 \text{ cm}^3}$.

b. On retourne le sablier. En supposant que le débit d'écoulement du sable est constant et égal à 1,98 cm³/min, calculer le temps en minutes et secondes que va mettre le sable à s'écouler dans le cylindre inférieur.

Débit = $\frac{\text{volume écoulé}}{\text{durée de l'écoulement}}$ donc durée = $\frac{\text{volume écoulé}}{\text{débit}}$ = $\frac{1,575\pi}{1,98}$ ≈ **2,5 min** soit **2 minutes et 30 secondes**.

2. En réalité, le débit d'écoulement d'un même sablier n'est pas constant. Dans une usine où on fabrique des sabliers comme celui-ci, on prend un sablier au hasard et on teste plusieurs fois le temps d'écoulement dans ce sablier. Voici les différents temps récapitulés dans le tableau suivant :

Temps mesuré	2 min 22 s	2 min 24 s	2 min 26 s	2 min 27 s	2 min 28 s	2 min 29 s	2 min 30 s
Nombre de tests	1	1	2	6	3	7	6

Temps mesuré	2 min 31 s	2 min 32 s	2 min 33 s	2 min 34 s	2 min 35 s	2 min 38 s
Nombre de tests	3	1	2	3	2	3

a. Combien de tests ont été réalisés au total ?

Total = 1 + 1 + 2 + 6 + 3 + 7 + 6 + 3 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 = $\boxed{40}$.

40 tests ont été effectués au total.

b. Un sablier est mis en vente s'il vérifie les trois conditions ci-dessous, sinon il est éliminé.

- **L'étendue des temps est inférieure à 20 s**
- **La médiane des temps est comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s**
- **La moyenne des temps est comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s**

Le sablier testé sera-t-il éliminé ?

- ***<u>Etendue</u>*** : 2 min 38 s – 2 min 22 s = 16 s < 20 s. ☑

- ***<u>Médiane</u>*** : Il y a 40 valeurs donc la médiane est comprise entre la 20ème valeur (2 min 29 s) et la 21ème valeur (2 min 30 s) donc elle est bien comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s. ☑

- ***<u>Moyenne</u>*** :

Temps mesuré	2 min 22 s	2 min 24 s	2 min 26 s	2 min 27 s	2 min 28 s	2 min 29 s	2 min 30 s
Temps en s	142 s	144 s	146 s	147 s	148 s	149 s	150 s
Nombre de tests	1	1	2	6	3	7	6

Temps mesuré	2 min 31 s	2 min 32 s	2 min 33 s	2 min 34 s	2 min 35 s	2 min 38 s
Temps en s	151 s	152 s	153 s	154 s	155 s	158 s
Nombre de tests	3	1	2	3	2	3

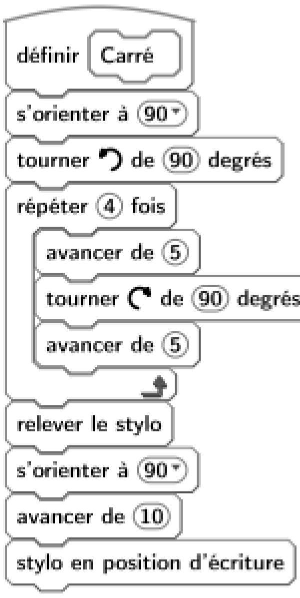
Moyenne = $\dfrac{142 + 144 + 146\times2 + 147\times6 + 148\times3 + 149\times7 + 150\times6 + 151\times3 + 152 + 153\times2 + 154\times3 + 155\times2 + 158\times3}{40}$

$= \dfrac{6\,004}{40}$ = 150,1 s ou 2 min 30 s et 1 dixième de seconde. La moyenne des temps est comprise entre 2 min 28 s et 2 min 32 s. ☑

Le sablier testé est donc validé.

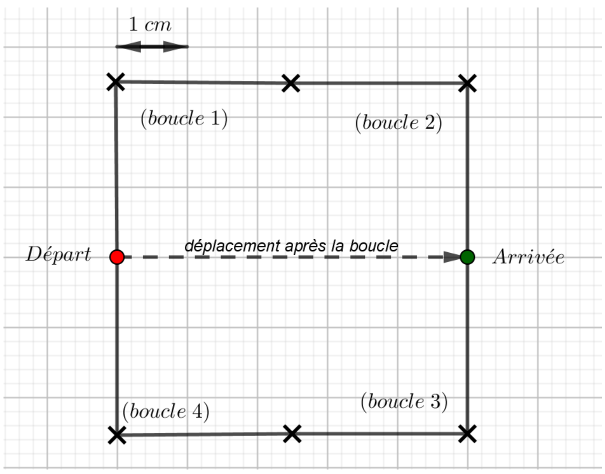
Exercice 4. Algorithme 19 points

On veut réaliser un dessin constitué de deux types d'éléments (tirets et carrés) mis bout à bout.
Chaque script ci-contre trace un élément, et déplace le stylo.
On rappelle que « s'orienter à 90 » signifie qu'on oriente le stylo vers la droite.



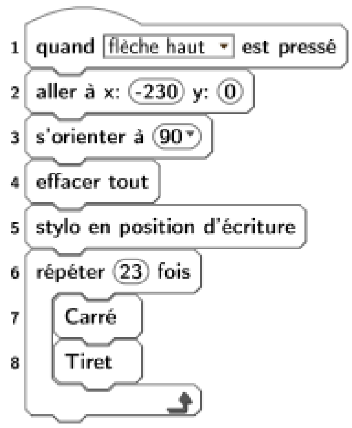
1. En prenant 1 cm pour 2 pixels, représenter la figure obtenue si on exécute le script Carré. Préciser les positions de départ et d'arrivée du stylo sur votre figure.

⚠ *tels quels, ces deux scripts ne tracent rien seuls, le bloc « stylo en position d'écriture » étant en fin de script ou absent.*

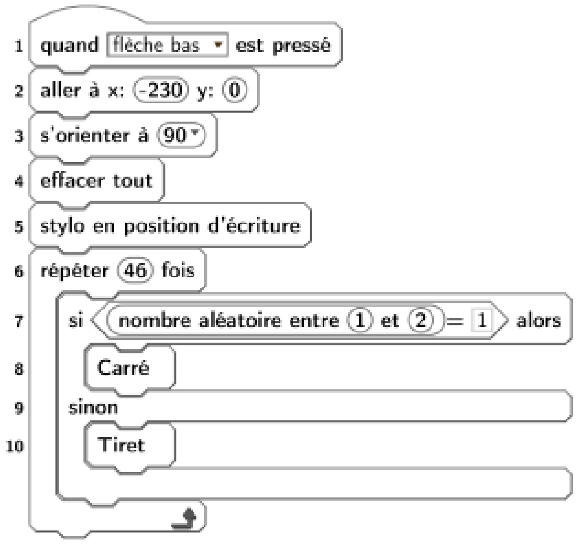


Pour tracer le dessin complet, on a réalisé 2 scripts qui se servent des blocs « Carré » et « Tiret » ci-dessus :

Script 1

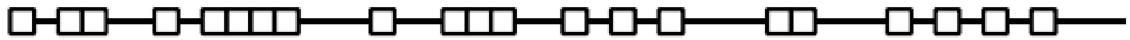


Script 2

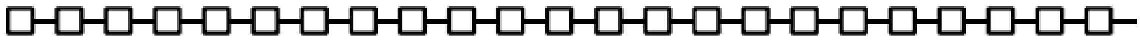


On exécute les deux scripts et on obtient les deux dessins ci-dessous.

Dessin A



Dessin B



2. Attribuer à chaque script la figure dessinée. Justifier votre choix.

Le Dessin B correspond au Script 1 car il alterne 23 fois des carrés et des tirets.
Le Dessin A correspond donc au Script 2. On remarque que l'alternance carré-tiret n'est pas régulière.

3. On exécute le script 2.
a. Quelle est la probabilité que le premier élément tracé soit un carré ?

Chaque étape de la boucle étant indépendante, la probabilité que le premier élément soit un carré est d'une chance sur 2 (lorsque le nombre aléatoire, 1 ou 2, est 1). $\boxed{\mathbf{P = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\ \%}}$

b. Quelle est la probabilité que les deux premiers éléments soient des carrés ?

A chaque boucle, la probabilité d'obtenir un carré est de $\frac{1}{2}$. Pour obtenir consécutivement 2 carrés, la probabilité est donc de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\mathbf{\frac{1}{4}}}$.

4. Dans le script 2, on aimerait que la couleur des différents éléments, tirets ou carrés, soit aléatoire, avec à chaque fois 50 % de chance d'avoir un élément noir et 50 % de chance d'avoir

un élément rouge. Écrire la suite d'instructions qu'il faut alors créer et préciser où l'insérer dans le script 2.

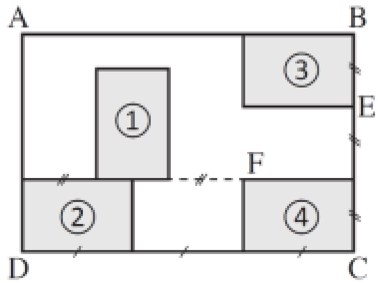
Indication : on pourra utiliser les instructions [mettre la couleur du stylo à rouge] et [mettre la couleur du stylo à noir] pour choisir la couleur du stylo.

A la ligne 7 on peut insérer :

7. Si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors
8. Mettre la couleur du stylo à rouge
9. Sinon
10. Mettre la couleur du stylo à noir

Exercice 5. Géométrie 18 points

Olivia s'est acheté un tableau pour décorer le mur de son salon. Ce tableau, représenté ci-contre, est constitué de quatre rectangles identiques nommés ①, ②, ③ et ④ dessinés à l'intérieur d'un grand rectangle ABCD d'aire égale à 1,215 m². Le ratio longueur : largeur est égal à 3 : 2 pour chacun des cinq rectangles.



1. Recopier, en les complétant, les phrases suivantes. Aucune justification n'est demandée.

a. Le rectangle ③ est l'image du rectangle ④ par la translation qui transforme C en E.
b. Le rectangle ③ est l'image du rectangle ① par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.
c. Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ④ par l'homothétie de centre **C** et de rapport 3.
(ou *② par l'homothétie de centre D ou ③ par l'homothétie de centre B.*)

2. Quelle est l'aire d'un petit rectangle ?

ABCD est un agrandissement du rectangle ④ de rapport 3, donc ④ est une réduction du rectangle ABCD de rapport $\frac{1}{3}$. Ainsi, l'aire A d'un petit rectangle est : A = $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 1{,}215 = \boxed{\mathbf{0{,}135\ m^2.}}$

3. Quelles sont la longueur et la largeur du rectangle ABCD ?

Le ratio longueur : largeur est égal à 3 : 2 pour chacun des cinq rectangles. Donc $\frac{L}{3} = \frac{l}{2}$ et $L = \frac{3}{2} \times l$.

Aire = L × l ou $1{,}215 = \frac{3}{2} \times l \times l$ d'où $l^2 = \frac{2}{3} \times 1{,}215 = 0{,}81$.

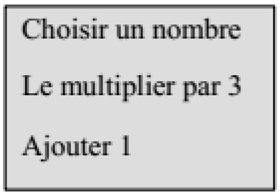
Deux solutions pour l, 0,9 et -0,9, mais comme il s'agit d'une longueur, nous garderons la valeur positive : $\boxed{\mathbf{l = 0{,}9\ m}}$

$L = \frac{3}{2} \times 0{,}9 = \boxed{\mathbf{1{,}35\ m}}$

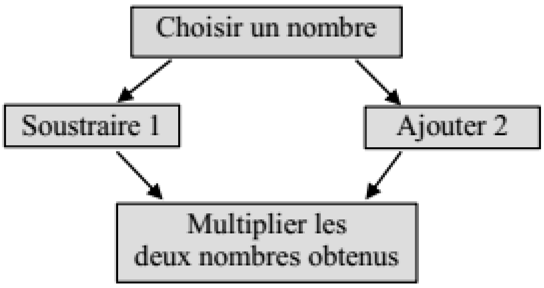
Exercice 6. Calcul littéral 17 points

Voici deux programmes de calcul.

Programme 1



Programme 2



1. Vérifier que si on choisit 5 comme nombre de départ,

• Le résultat du programme 1 vaut 16.
*** 5**
*** 5 × 3 = 15**
*** 15 + 1 = $\boxed{16}$**

• Le résultat du programme 2 vaut 28
*** 5**
*** 5 – 1 = 4 et 5 + 2 = 7**
*** 4 × 7 = $\boxed{28}$**

On appelle A(x) le résultat du programme 1 en fonction du nombre x choisi au départ.
La fonction B : $x \mapsto (x – 1)(x + 2)$ donne le résultat du programme 2 en fonction du nombre x choisi au départ.

2.

a. Exprimer A(x) en fonction de x. $\boxed{A(x) = 3x + 1}$.

b. Déterminer le nombre que l'on doit choisir au départ pour obtenir 0 comme résultat du programme 1.

Il faut résoudre l'équation $3x + 1 = 0$. $3x = -1$ et on obtient $\boxed{x = \frac{-1}{3}}$. (ou on « remonte » le programme : on soustrait 1 puis on divise par 3)

3. Développer et réduire l'expression : B(x) = $(x – 1)(x + 2)$

***B(x)* = $(x – 1)(x + 2) = x^2 + 2x – x – 2 = \boxed{x^2 + x – 2}$.**

4.

a. Montrer que $B(x) - A(x) = (x+1)(x-3)$

$B(x) - A(x) = x^2 + x - 2 - (3x + 1) = x^2 + x - 2 - 3x - 1 = \boldsymbol{x^2 - 2x - 3}$.
$(x + 1)(x - 3) = x^2 - 3x + x - 3 = \boldsymbol{x^2 - 2x - 3}$.

Les formes développées et réduites des deux expressions sont les mêmes donc on a bien :
$B(x) - A(x) = (x + 1)(x - 3)$

b. Quels nombres doit-on choisir au départ pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat ? Expliquer la démarche.

On cherche à résoudre l'équation A(x) = B(x), ce qui équivaut à résoudre B(x) – A(x) = 0.
Or, $\mathrm{B}(x) - \mathrm{A}(x) = (x+1)(x-3)$, donc trouver les nombres à choisir au départ pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat revient à résoudre l'équation produit :
$(x+1)(x-3) = 0$.

Un produit est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul :

$x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$
$\mathrm{x} = -1$ $\qquad$ $\mathrm{x} = 3$

<u>Les solutions sont -1 et 3.</u>