Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2019 Amérique du Nord

4 Juin 2019
Correction

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

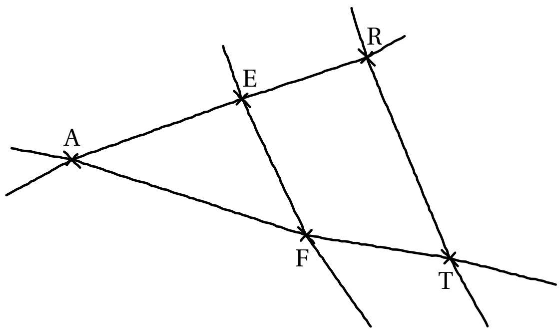
/

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Géométrie — 14 points

On considère la figure ci-contre, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle. On donne les informations suivantes : les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A ; $AE = 8$ cm, $AF = 10$ cm, $EF = 6$ cm ; $AR = 12$ cm, $AT = 14$ cm



1. **Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E.**
Si le triangle AFE est rectangle, c'est forcément en E car $[AF]$ est le plus grand côté. On a:

D'une part :	et	D'autre part :
$AF^2 = 10^2$		$AE^2 + FE^2 = 8^2 + 6^2$
$AF^2 = 100$		$AE^2 + FE^2 = 64 + 36$
		$AE^2 + FE^2 = 100$

Conclusion : $AF^2 = AE^2 + FE^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AFE est rectangle en E.

2. **En déduire une mesure de l'angle $\widehat{EAF}$ au degré près.**
Le triangle AEF est rectangle en F donc :

$$\cos \widehat{EAF} = \frac{AE}{AF} = \frac{8}{10} \Longrightarrow \boxed{\widehat{EAF} = \arccos\left(\frac{8}{10}\right) \approx 37°}$$

3. Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles ?

- **Données**.
  Les points A, E, R et A, F, T sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en A.
- **Le test, avec mise au même dénominateur**.

$$\begin{cases} \dfrac{AE}{AR} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{21} \\ \dfrac{AF}{AT} = \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{7} = \dfrac{15}{21} \end{cases}$$

- **Conclusion**.
  On n'a donc pas égalité, $\dfrac{AE}{AR} \neq \dfrac{AF}{AT}$. De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, les droites (EF) et (RT) ne sont pas parallèles.

Exercice 2. Vrai/Faux — 17 points

Affirmation 1 (Fausse)

Affirmation 1 : $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3+1}{5+2}$.

Preuve

D'une part après mise au même dénominateur :

$$\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\times 2}{5\times 2} + \dfrac{1\times 5}{2\times 5} = \dfrac{6+5}{10} = \dfrac{11}{10}$$

D'autre part :

$$\dfrac{3+1}{5+2} = \dfrac{4}{7}$$

Pour être rigoureux, on peut les mettre au même dénominateur afin de montrer qu'elle sont bien différentes.

$$\dfrac{11}{10} = \dfrac{77}{70} \quad \text{et} \quad \dfrac{4}{7} = \dfrac{40}{70}$$

Les deux fractions sont différentes donc l'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 (Fausse)

On considère la fonction $f : x \longmapsto 5 - 3x$.

Affirmation 2 : l'image de -1 par f est -2.

Preuve

L'image de -1 par f est :

$$f(-1) = 5 - 3\times(-1) = 5 + 3 = 8 \neq -2$$

L'affirmation 2 est fausse.

©ISSN 2272-5318

Affirmation 3 (Fausse)

On considère deux expériences aléatoires :

- expérience n° 1 : choisir au hasard un nombre entier compris entre 1 et 11 (1 et 11 inclus).
- expérience n° 2 : lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et annoncer le nombre qui apparait sur la face du dessus.

Affirmation 3 : il est plus probable de choisir un nombre premier dans l'expérience n° 1 que d'obtenir un nombre pair dans l'experience n° 2.

Preuve

- Expérience n° 1 : *choisir au hasard un nombre entier compris entre 1 et 11 (1 et 11 inclus).*
  L'ensemble des issues possible de cette expérience aléatoire est composé des 11 entiers de 1 à 11. Parmi ces 11 entiers, seuls 5 sont premiers :
  $$2\,;\,3\,;\,5\,;\,7 \text{ et } 11$$
  Donc la probabilité de choisir un nombre premier dans l'expérience n° 1 est :
  $$p_1 = \frac{5}{11}$$
- Expérience n° 2 : *lancer un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et annoncer le nombre qui apparait sur la face du dessus.*
  L'ensemble des issues possible de cette expérience aléatoire est composé des 6 entiers de 1 à 6. Parmi ces 6 entiers, seuls 3 sont pairs :
  $$2\,;\,4 \text{ et } 6$$
  Donc la probabilité de choisir un nombre pair dans l'expérience n° 2 est :
  $$p_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} > \frac{5}{11}$$
- Conclusion : l'affirmation 3 est encore fausse car il est plus probable de choisir un nombre premier dans l'expérience n° 2 que d'obtenir un nombre pair dans l'experience n° 1.

Affirmation 4 (Vraie)

Affirmation 4 : pour tout nombre x, $\quad (2x+1)^2 - 4 = (2x+3)(2x-1)$.

Preuve

Méthode 1 : on factorise l'expression de gauche.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2 - 4 &= (2x+1)^2 - 2^2 \\ &= \Big[(2x+1)-2\Big] \times \Big[(2x+1)+2\Big] \\ &= \Big[2x+1-2\Big] \times \Big[2x+1+2\Big] \\ &= \underline{(2x-1)(2x+3)}\end{aligned}$$

On retrouve bien la forme factorisée, donc l'égalité 4 est bien vraie pour tous les nombres x.

Preuve

Méthode 2 : on développe chaque terme indépendamment. Attention, il ne faut surtout pas écrire l'égalité que l'on cherche à démontrer.

D'une part :

$$\begin{aligned}(2x+1)^2-4 &= 4x^2+8x+1-4\\ &= \underline{4x^2+8x-3}\end{aligned}$$

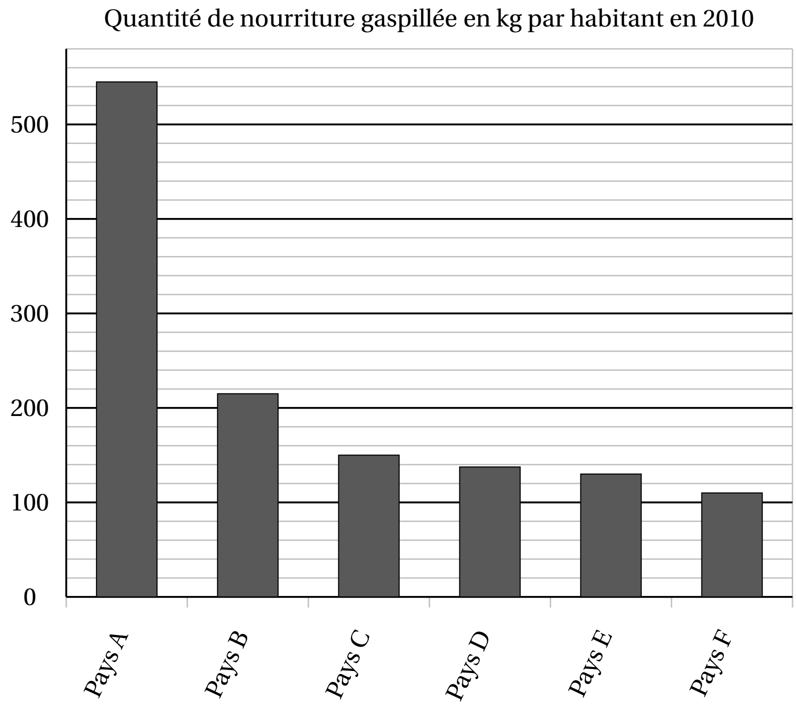
D'autre part :

$$\begin{aligned}(2x+3)(2x-1) &= 4x^2-4x+6x-3\\ &= \underline{4x^2+8x-3}\end{aligned}$$

On retrouve bien la même forme développée avec les deux expressions, donc l'égalité 4 est bien vraie pour tous les nombres x.

Exercice 3. Statistiques et tableur — 12 points

Le diagramme ci-dessous représente, pour six pays, la quantité de nourriture gaspillée (en kg) par habitant en 2010.



1. **Donner approximativement la quantité de nourriture gaspillée par un habitant du pays D en 2010.**
   Environ 140 kg de nourriture par habitant du pays D ont été gaspillés en 2010.

2. **Peut-on affirmer que le gaspillage de nourriture d'un habitant du pays F représente environ un cinquième du gaspillage de nourriture d'un habitant du pays A ?**

   - Environ 545 kg de nourriture gaspillée par habitant du pays A.
   - Et environ 110 kg de nourriture gaspillée par habitant du pays F en 2010.
   - Conclusion :

   $$\frac{545}{5} = 109 \approx 110$$

   Le gaspillage de nourriture d'un habitant du pays F représente bien environ un cinquième du gaspillage de nourriture d'un habitant du pays A.

3. *On veut rendre compte de la quantité de nourriture gaspillée pour d'autres pays. On réalise alors le tableau ci-dessous à l'aide d'un tableur.* *Rappel : 1 tonne = 1 000*kg.

	A	B	C	D
1		Quantité de nourriture gaspillée par habitant en 2010 (en kg)	Nombre d'habitants en 2010 (en millions)	Quantité totale de nourriture gaspillée (en tonnes)
2	Pays X	345	10,9	3 760 500
3	Pays Y	212	9,4	
4	Pays Z	135	46,6	

3. a. Quelle est la quantité totale de nourriture gaspillée par les habitants du pays X en 2010 ?
3 760 500 tonnes de nourriture ont été gaspillée par les habitant du pays X en 2010.

3. b. Voici trois propositions de formule, recopier sur votre copie celle qu'on a saisie dans la cellule D2 avant de l'étirer jusqu'en D4.

Proposition 1	**Proposition 2**	**Proposition 3**
=B2*C2*1 000 000	=B2*C2	=B2*C2*1 000

- Analyse du problème :
  Pour calculer la quantité totale de nourriture gaspillée par les habitants du pays X en 2010 et en tonnes il faut multiplier le nombre d'habitants par la quantité de nourriture en kg et diviser par mille pour obtenir le résultat en tonnes soit :

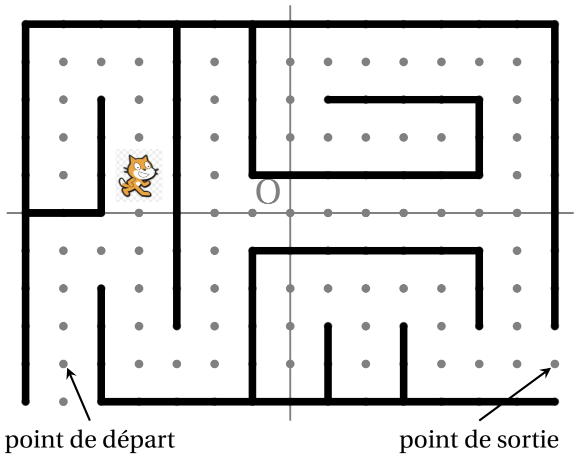
$$345 \times 10,9 \times 10^6 \div 10^3 = 345 \times 10,9 * 1\ 000$$

- Formule du tableur : c'est donc la formule 3

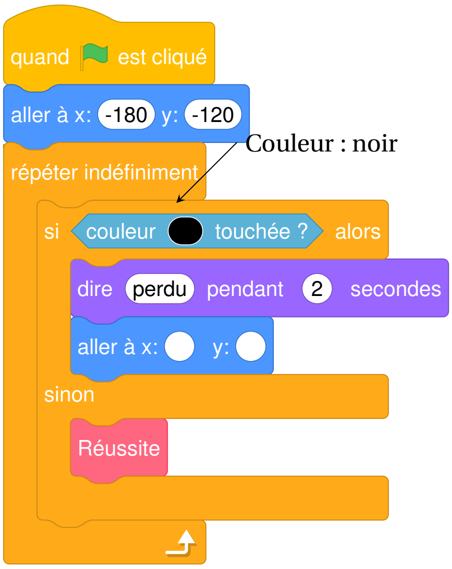
$$\boxed{\text{=B2*C2*1 000}}$$

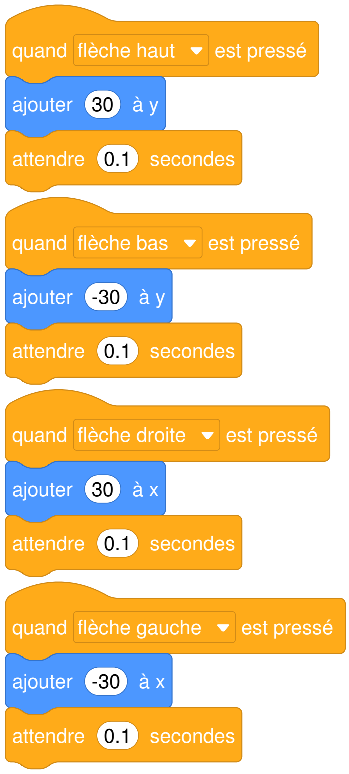
Exercice 4. Algorithmique — 10 points

On a programmé un jeu. Le but du jeu est de sortir du labyrinthe. Au début du jeu, le lutin se place au point de départ. Lorsque le lutin touche un mur, représenté par un trait noir épais, il revient au point de départ. L'arrière-plan est constitué d'un repère d'origine O avec des points espacés de 30 unités verticalement et horizontalement. Dans cet exercice, on considèrera que seuls les murs du labyrinthe sont noirs.



Voici le programme :





Le bloc Réussite correspond à un sous-programme qui fait dire « Gagné ! » au lutin lorsqu'il est situé au point de sortie ; le jeu s'arrête alors.

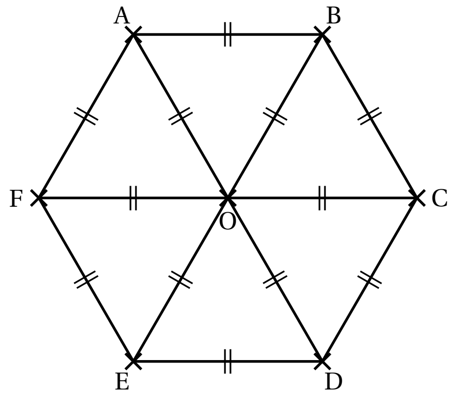
1. **Recopier et compléter l'instruction** aller à x: ◯ y: ◯ **du programme pour ramener le lutin au point de départ si la couleur noire est touchée.**

2. **Quelle est la distance minimale parcourue par le lutin entre le point de départ et le point de sortie ?**
Le lutin doit avancer 27 fois de 30 unités (verticalement ou horizontalement) soit au total :

$$27 \times 300 = \underline{810 \text{ unités}}$$

3. **On lance le programme en cliquant sur le drapeau. Le lutin est au point de départ. On appuie sur la touche ↑ (« flèche haut ») puis sur la touche → (« flèche droite »). Quelles sont les actions effectuées par le lutin ?**
En appuyant sur la touche « flèche haut » le lutin se déplace de 30 pixels vers le haut. En appuyant sur la touche « flèche droite » le lutin se déplace de 30 pixels vers la droite. La couleur touchée est alors noire. Le lutin revient donc à sa position initiale $(-180\ ;\ -120)$.

Exercice 5. Transformations du plan — 10 points



Dans cet exercice, aucune justification n'est attendue

On considère l'hexagone ABCDEF de centre O représenté ci-contre.

1. **Parmi les propositions suivantes, recopier celle qui correspond à l'image du quadrilatère CDEO par la symétrie de centre O.**

Proposition 1	Proposition 2	Proposition 3
FABO	ABCO	FODE

Par la symétrie de centre O, le point C a pour image F, le point D a pour image A et le point E a pour image B :

$$\begin{cases} C \longrightarrow F \\ D \longrightarrow A \\ E \longrightarrow B \\ O \longrightarrow O \end{cases}$$

Ainsi, l'image du quadrilatère CDEO par la symétrie de centre O est le quadrilatère FABO. Proposition 1

2. **Quelle est l'image du segment [AO] par la symétrie d'axe (CF) ?**
Par la symétrie d'axe (CF), le point A a pour image E, le point O a pour image O :

$$\begin{cases} A \longrightarrow E \\ O \longrightarrow O \end{cases}$$

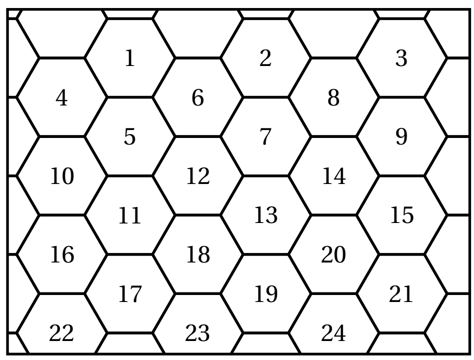
Ainsi, l'image du segment [AO] par la symétrie d'axe (CF) est le segment [EO].

3. **On considère la rotation de centre O qui transforme le triangle OAB en le triangle OCD. Quelle est l'image du triangle BOC par cette rotation ?**
Tous les triangles sont équilatéraux donc d'angles 60°.
La rotation de centre O qui transforme le triangle OAB en le triangle OCD est donc la rotation de centre O et d'angle

$$2 \times 60 = 120^\circ$$

dans le sens des aiguilles d'une montre (sens indirect). Par cette transformation, l'image du triangle BOC est le triangle DOE.

La figure ci-contre représente un pavage dont le motif de base a la même forme que l'hexagone ci-dessus. On a numéroté certains de ces hexagones.



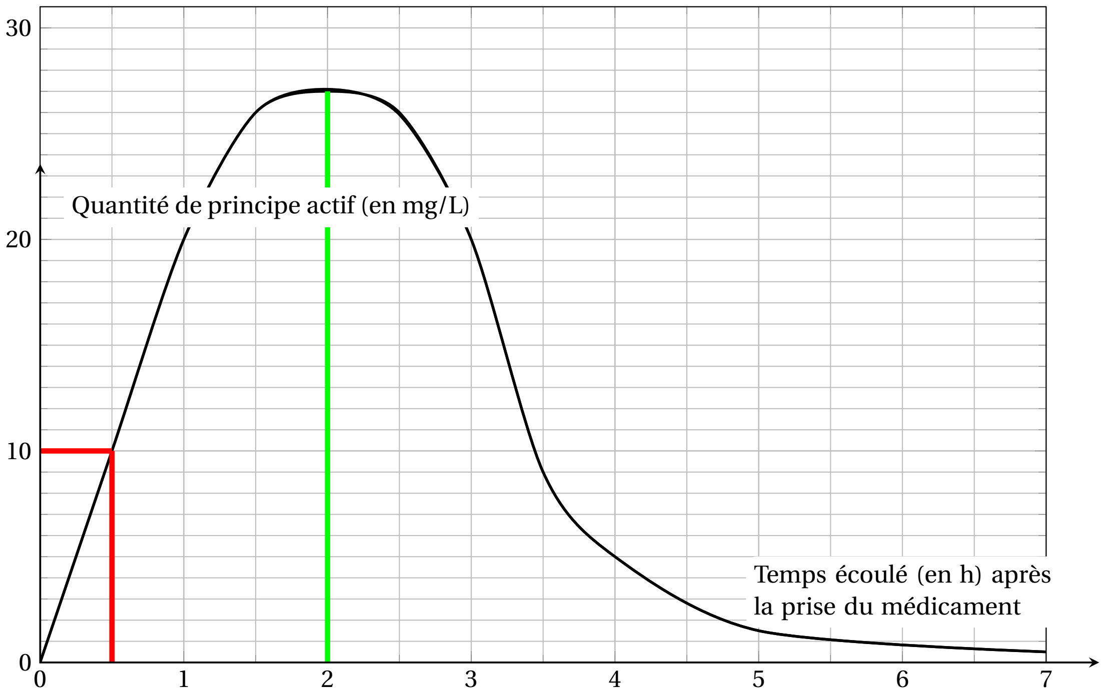
4. **Quelle est l'image de l'hexagone 14 par la translation qui transforme l'hexagone 2 en l'hexagone 12 ?**
Par la translation qui transforme l'hexagone 2 en l'hexagone 12, l'hexagone 14 est transformé en l'hexagone 19.

Exercice 6. Lectures graphiques et extraction de données 12 points

Les deux parties A et B sont indépendantes.

Partie A : absorption du principe actif d'un médicament

Lorsqu'on absorbe un médicament, que ce soit par voie orale ou non, la quantité de principe actif de ce médicament dans le sang évolue en fonction du temps. Cette quantité se mesure en milligrammes par litre de sang. Le graphique ci-dessous représente la quantité de principe actif d'un médicament dans le sang, en fonction du temps écoulé, depuis la prise de ce médicament.



1. **Quelle est la quantité de principe actif dans le sang, trente minutes après la prise de ce médicament ?**
   Trente minutes soit 0,5 heure après la prise de ce médicament, il y a 10 mg/L de principe actif dans le sang.
2. **Combien de temps après la prise de ce médicament, la quantité de principe actif est-elle la plus élevée ?**
   La quantité de principe actif est la plus élevée environ 2 heures après la prise de ce médicament.

Partie B : comparaison de masses d'alcool dans deux boissons

On fournit les données suivantes :

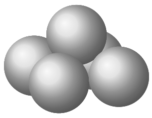
Formule permettant de calculer la masse d'alcool en g dans une boisson alcoolisée :	**Deux exemples de boissons alcoolisées :**
$$m = V \times d \times 7,9$$ V : volume de la boisson alcoolisée en cL d : degré d'alcool de la boisson (exemple, un degré d'alcool de 2 % signifie que d est égal à 0,02)	**Boisson 1** Degré d'alcool : 5 % Contenance : 33 cL **Boisson 2** Degré d'alcool : 12 % Contenance 125 mL

Question : la boisson 1 contient-elle une masse d'alcool supérieure à celle de la boisson 2 ?

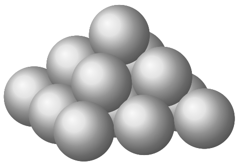
- Pour la boisson 1 :
$$m_1 = V \times d \times 7,9 = 33 \times 0,05 \times 7,9 = 13,035 \text{ g}$$
- Pour la boisson 2 :
$$m_2 = V \times d \times 7,9 = 12,5 \times 0,12 \times 7,9 = 11,85 \text{ g}$$
- Conclusion : la boisson 1 contient une masse d'alcool supérieure à celle de la boisson 2.

Exercice 7. Espace et volume — 15 points

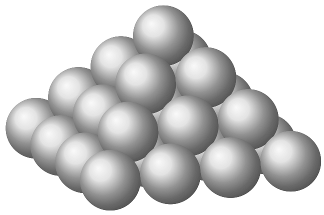
Pour ranger les boulets de canon, les soldats du XVIe siècle utilisaient souvent un type d'empilement pyramidal à base carrée, comme le montrent les dessins suivants :



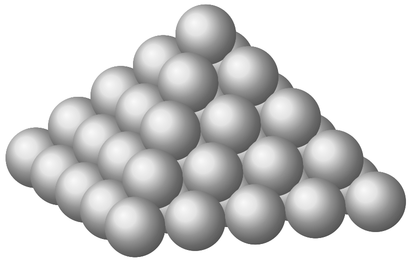
Empilement à 2 niveaux



Empilement à 3 niveaux



Empilement à 4 niveaux



Empilement à 5 niveaux

1. **Combien de boulets contient l'empilement à 2 niveaux ?**
   Il y a 5 boulets dans l'empilement à 2 niveaux.

2. **Expliquer pourquoi l'empilement à 3 niveaux contient 14 boulets.**
   Chaque étage est composé de boules composées en carrés. Au sommet une boule, à l'étage en dessous un carré de 2 boules de côté, et au premier un carré de 3 boules de côté. Dans l'empilement à 3 niveaux, il y a donc :

$$1+2^2+3^2=1+4+9=\underline{14 \text{ boulets}}.$$

3. **On range 55 boulets de canon selon cette méthode. Combien de niveaux comporte alors l'empilement obtenu ?**
   On peut reprendre le procédé décrit lors de la question précédente :

   - Dans l'empilement à 4 niveaux, il y a :

$$1+2^2+3^2+4^2=1+4+9+16=\underline{30 \text{ boulets}}.$$

   - Dans l'empilement à 5 niveaux, il y a :

$$1+2^2+3^2+4^2+5^2=30+25=\underline{55 \text{ boulets}}.$$

4. **Ces boulets sont en fonte ; la masse volumique de cette fonte est de 7 300 kg/m^3. On modélise un boulet de canon par une boule de rayon 6 cm. Montrer que l'empilement à 3 niveaux de ces boulets pèse 92 kg, au kg près.**

   - L'empilement à 3 niveaux est composé de 14 boulets.
   - Le volume d'un boulet de rayon 6 cm = 0,06 m est :

$$V=\frac{4}{3}\times\pi\times 0{,}06^3 \text{ m}^3$$

   - Donc la masse de ces 14 boulets est :

$$m=14\times 7300\,\text{kg/m}^3\times\left(\frac{4}{3}\times\pi\times 0{,}06^3 \text{ m}^3\right)\approx\underline{92{,}47 \text{ kg}}$$

   - Conclusion : l'empilement à 3 niveaux de ces boulets pèse 92 kg, au kg près.

Rappels

- *Volume d'une boule* $=\frac{4}{3}\times\pi\times$ rayon $\times$ rayon $\times$ rayon .
- une masse volumique de 7 300 kg/m^3 signifie que 1 m^3 pèse 7 300 kg.

Exercice 8. Statistiques 10 points

Dans une classe de Terminale, huit élèves passent un concours d'entrée dans une école d'enseignement supérieur. Pour être admis, il faut obtenir une note supérieure ou égale à 10. Une note est attribuée avec une précision d'un demi-point (par exemple : 10; 10,5; 11; ...) On dispose des informations suivantes :

Information 1

Notes attribuées aux 8 élèves de la classe qui ont passé le concours :

10; 13; 15; 14,5; 6; 7,5; ◆; ●

Information 2

La série constituée des huit notes : • a pour étendue 9; • a pour moyenne 11,5; • a pour médiane 12.	75 % des élèves de la classe qui ont passé le concours ont été reçus.

1. **Expliquer pourquoi il est impossible que l'une des deux notes désignées par ◆ ou ● soit 16.**
   Parmi les six notes connues, la plus basse note est 6 donc parmi les huit notes, la notes minimale est au plus de 6.
   Puisque l'étendue de cette série est égale à 9, cela signifie que la plus haute note est inférieure ou égal à $6+9=15<16$.
   Aucune des notes manquantes ne peut donc être 16.

2. **Est-il possible que les deux notes désignées par ◆ et ● soient 12,5 et 13,5?**
   On suppose donc que les huit notes, rangées par ordre croissant sont :

$$6\ ;\ 7,5\ ;\ 10\ ;\ \underbrace{12,5\ ;\ 13}\ ;\ 13,5\ ;\ 14,5\ ;\ 15$$

   - Puisqu'il y a huit valeurs, la médiane se situe entre la 4^{e} et 5^{e} valeur soit :

$$M_e = \frac{12,5+13}{2} = 12,75 \neq 12$$

   - Conclusion : il n'est pas possible que les deux notes manquantes soient 12,5 et 13,5.

Fin du devoir