$\boxed{\textit{BREVET BLANC 2010}}$
CORRECTION
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

ACTIVITES NUMERIQUES

Exercice 1

1. La fraction $\frac{4114}{7650}$ peut être simplifiée puisque 4114 et 7650 sont deux nombres pairs donc divisibles par 2.

2. On détermine le PGCD de 4114 et de 7650 par l'algorithme d'Euclide :
7650 > 4114
$7650 = 4114 \times 1 + 3536$
$4114 = 3536 \times 1 + 578$
$3536 = 578 \times 6 + 68$
$578 = 68 \times 8 + 34$
$68 = 34 \times 2 + 0$ donc le PGCD de 4114 et de 7650 est 34.

3. $\frac{4114}{7650} = \frac{4114:34}{7650:34} = \frac{121}{225}$.

4. $A = 5\sqrt{4114} - 4\sqrt{7650}$
$A = 5\sqrt{121 \times 34} - 4\sqrt{225 \times 34}$
$A = 5 \times 11\sqrt{34} - 4 \times 15\sqrt{34}$
$A = 55\sqrt{34} - 60\sqrt{34}$
$A = -5\sqrt{3}4$

Exercice 2

1. On reconnaît l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

2. a. Si $x = -3$, le programme donne $(-3 - 6)\times(-3)+9= -9\times(-3)+9=27+9=\boxed{36}$
Si $x = 2$, le programme donne $(2 - 6)\times2+9= -4\times2 + 9 = -8 + 9 = \boxed{1}$
Si $x = \frac{2}{3}$, le programme donne $\left(\frac{2}{3} - 6\right) \times \frac{2}{3} + 9 = \frac{2-18}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{81}{9} = \frac{-16\times2}{9} + \frac{81}{9} = \frac{-32+81}{9} = \boxed{\frac{49}{9}}$.

2.b et c. Soit x le nombre choisi
$(x - 6) \times x + 9 = x^2 - 6x + 9$
d. Margot a raison, $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, d'après la question 1, et un nombre élevé au carré donne un résultat positif.

Exercice 3

1) $4x^2 - 20x + 25$

2) 10^5 et 100 000

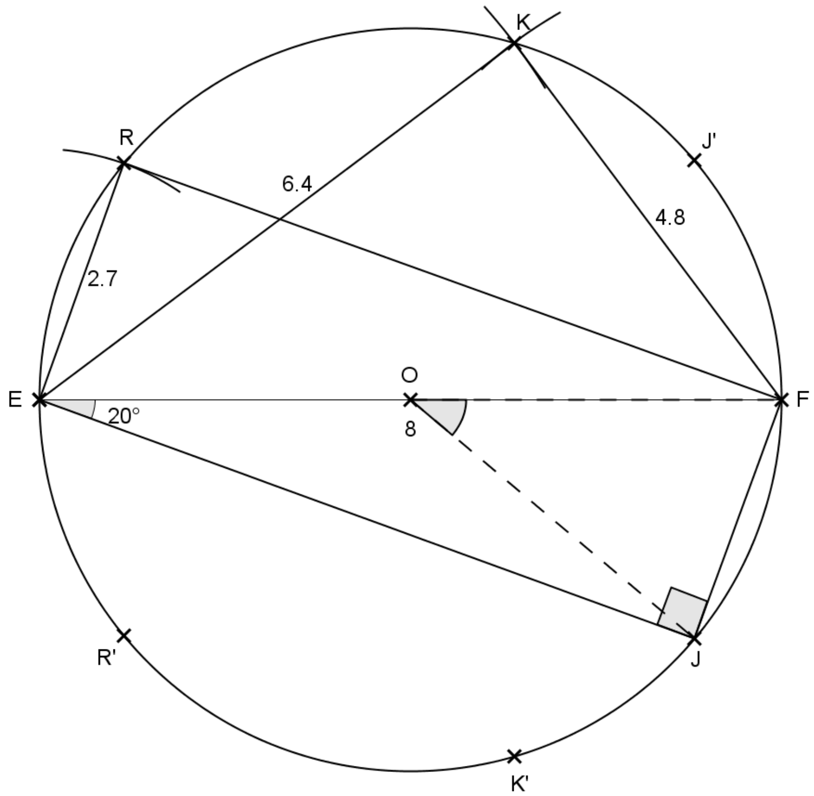
3) $(3x - 2)(3x + 2)$

4) $\frac{2}{3}$ et $\frac{-3}{2}$

ACTIVITES GEOMETRIQUES

Exercice 1

1.a.(figure)
1.b.(figure)



2.a. Démontrons que EFR est un triangle rectangle.

On sait que EFR est un triangle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [EF], or si, dans un cercle, un triangle a pour sommets les extrémités d'un diamètre et un point du cercle alors ce triangle est rectangle en ce point, donc le triangle EFR est rectangle en R.

2.b. Déterminons un arrondi de la mesure de l'angle $\widehat{EFR}$

Dans le triangle EFR rectangle en R ,

$\sin\widehat{EFR} = \frac{ER}{EF} = \frac{2,7}{8}$ donc $\widehat{EFR} = sin^{-1}(\frac{2,7}{8}) \approx 19,7°$.

2.c. Déterminons un arrondi de la longueur RF :

Dans le triangle EFR rectangle en R ,

$\cos\widehat{EFR} = \frac{RF}{EF}$ donc $cos\ 19,7° \approx \frac{RF}{8}$

Donc RF ≈ 8×cos 19,7°≈7,5 cm.

3.a.(figure)

3.b. Démontrons que EFK est un triangle rectangle

Dans le triangle EFK, [EF] est le côté le plus grand

$EF^2 = 8^2 = 64$

$EK^2 = 6,4^2 = 40,96$

$KF^2 = 4,8^2 = 23,04$

Donc $EK^2 + KF^2 = 40,96 + 23,04 = 64 = EF^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle EFK est rectangle en K.

3.c. Démontrons que K est un point du cercle $\mathcal{C}$

On sait que le triangle EKF est rectangle en K et [EF] est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$
Or si un triangle est rectangle alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit donc le triangle EFK est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc K est un point du cercle $\mathcal{C}$.

4.a. Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{JOF}$

On sait que $\widehat{JOF}$ est un angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{JF}$,
$\widehat{JEF}$ est un angle inscrit qui intercepte le même arc dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, donc par propriété, on a : $\widehat{JOF} = 2\times \widehat{JEF} = 2 \times 20 = 40°$.

Exercice 2

1.a. Montrons que, en cm, la longueur du segment [AC] est $3\sqrt{3}$.

Dans le triangle ACO est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore on a :

$AO^2 = AC^2 + OC^2$

$AC^2 = AO^2 - OC^2$

$AC^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$

AC = $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}cm.$

2.a. Démontrons que les droites (ES) et (AC) sont parallèles.

On sait que (ES) et (AC) sont perpendiculaires à (EC),
or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles,
donc (ES) et (AC) sont parallèles.

2.b. Calculons les valeurs exactes de OS et EC.

On sait que les droites (AS) et (EC) sont sécantes en O,
les points E, O, C d'une part et les points S, O, A d'autre part sont alignés
(ES) // (AC) (d'après la question 2.b.)
EO = 5cm, OA = 6cm et OC = 3cm
Or d'après le théorème de Thalès, on a

$\frac{OC}{OE} = \frac{OA}{OS} = \frac{AC}{ES}$ d'où $\frac{3}{5} = \frac{6}{OS} = \frac{3\sqrt{3}}{ES}$ donc OS = $\frac{5\times 6}{3} = 10cm.$ et ES = $\frac{5\times 3\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}cm.$

PROBLEME

PARTIE A

1.a. Montrons que les droites (MP) et (AC) sont parallèles.

On sait que APMQ est un rectangle or si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés opposés sont parallèles donc (MP)//(QA). De plus, Q est un point de [AC] donc (MP)//(AC).

1.b. Montrons que PM = $\frac{3}{4}x$.

On sait que les droites (CM) et (AP) sont sécantes en B,
les points B, M, C d'une part et les points B, P, A d'autre part sont alignés
(MP) // (AC) (d'après la question 1.a.)
AB = 4cm, AC = 3cm, BP = x,
Or d'après le théorème de Thalès, on a

$\frac{BP}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{MP}{CA}$ d'où $\frac{x}{4} = \frac{BM}{BC} = \frac{MP}{3}$ donc MP = $\frac{3 \times x}{4} = \frac{3}{4}x$.

2. Montrons que le périmètre du rectangle APMQ est égal à $8 - \frac{x}{2}$.

P_{APMQ} = 2×AP+2×MQ = 2×(4-x) + 2×$\frac{3}{4}x$ = 8-2x + $\frac{3}{2}x = 8 - \frac{4x-3x}{2} = 8 - \frac{x}{2}$.

3.a. Expliquons pourquoi on a $0 \leq x \leq 4$.

Pour que P soit sur [AB], x ne doit pas être supérieur à 4 cm de plus x ne peut être négatif (c'est une longueur) donc $0 \leq x \leq 4$.

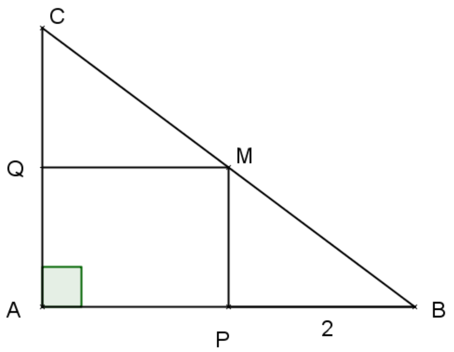
3.b. Est-il possible de placer le point M sur le segment [BC] pour que le périmètre du rectangle APMQ soit égal à : 7 cm ? 4 cm ? 10 cm ?

Si P = 7 cm, $8 - \frac{x}{2} = 7$ soit $\frac{-x}{2} = 7 - 8$ soit x = (7 - 8)×(-2) = -1×(-2)= 2 cm. Possible.

Si P = 4 cm, $8 - \frac{x}{2} = 4$ soit $\frac{-x}{2} = 4 - 8$ soit x = (4 - 8)×(-2) = -4×(-2)= 8 cm. Impossible car $0 \leq x \leq 4$.

Si P = 10 cm, $8 - \frac{x}{2} = 10$ soit $\frac{-x}{2} = 10 - 8$ soit x = (10 - 8)×(-2) = 2×(-2)= -4 cm. Impossible car $0 \leq x \leq 4$.

4. (Figure)



PARTIE B

1. Calculons la longueur BC

Dans le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 4^2 + 3^2$

$BC^2 = 16 + 9 = 25$

BC = $\sqrt{25} = 5cm.$

2. Montrons que BM = $\frac{5x}{4}$

D'après la question 1.b. de la partie A

On a $\frac{BM}{BC} = \frac{MP}{3}$ donc $\frac{BM}{5} = \frac{\frac{3}{4}x}{3}$ donc BM = $\frac{5\times\frac{3}{4}x}{3} = \frac{\frac{15}{4}x}{3} = \frac{15}{4}x \times \frac{1}{3} = \frac{5}{4}x.$

3. Déduisons-en le périmètre du triangle BPM en fonction de *x*

P_{BPM} = PB+BM+PM = x+$\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}x$= $\frac{12}{4}x = 3x.$

4. Calculons la valeur exacte de *x* pour laquelle le rectangle APMQ et le triangle BPM ont le même périmètre.

Dire que P_{BPM} = P_{APMQ}

Equivaut à résoudre $8 - \frac{x}{2}$ = 3*x*

8 = 3x + $\frac{x}{2}$

8= $\frac{6x+x}{2}$

8 = $\frac{7x}{2}$

x= $\frac{8\times2}{7} = \frac{16}{7}$.

Pour *x* = $\frac{16}{7}$, le périmètre de APMQ est égal à celui de BPM.